

## Reconhecimento da existência de um desvio padrão máximo a partir de perturbação de pontos para o qual a topologia de redes triangulares irregulares permanece constante

Alex de Lima Teodoro da Penha<sup>1</sup>  
Vagner Braga Nunes Coelho<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto Militar de Engenharia - IME. Departamento de Engenharia Cartográfica.  
Praça Gen. Tibúrcio, 80 - Urca - 22290-270. Rio de Janeiro – RJ - Brasil.  
alexdapenha@gmail.com, vagnercoelho@hotmail.com

**Abstract.** This article aims to contribute to results that quantify until accuracy  $\sigma$  (sigma) can consider what is ambiguous from the topological point of view. For it demonstrates that there is a maximum precision for which the topology remains constant at each point individually and in triangular irregular network as a whole. Various mathematical experiments were carried out using the pseudorandom Monte Carlo method. Each point of the network was initially upset with  $\sigma_{x_i} = \sigma_{y_i} = 1$ . Then the simulation took place on the net for sigmas varied. The experiments culminate in solving the problem of identifying the existence of sigma maximum for which the probability of occur in constant triangular irregular network topology is 100%. The mathematical results gave rise to the following theorem: If any point of coordinates  $(x_i, y_i)$  in a triangular irregular network is disrupted, according to a Normal distribution  $N(\mu, \sigma^2)$ , then there exists a value  $\sigma_{max}$  (sigma maximum) for which the network topology remains constant. It was found that  $\sigma_{max.1}$  of point 1 exists and is obtained by  $\sigma_{max.1} = \min(\sigma_{max}) = 0.30866$ . And that in point 2,  $\sigma_{max.2} = 0.2$ . It was the result of the following theorem for triangulated irregular network: Every two-dimensional irregular triangular network has a value  $\sigma_*$  (sigma asterisk) to which the network topology remains constant, obtained by:  $\sigma_* = \min(\max \sigma_i) = \min(\sigma_{max.1}, \sigma_{max.2}, \dots, \sigma_{max.n})$ . Doing the worst case of irregular triangular network:  $\sigma_* = \min(\sigma_{max.1}, \sigma_{max.2}) = 0.2$ . It is concluded that sigma maximum for each point exists, as well as for the network as a whole.

**Palavras-chave:** Redes triangulares irregulares, simulação de Monte Carlo, topologia, probabilidade, TIN, triangular irregular network, Monte Carlo *simulation, topology, probability*.

### 1. Introdução

As ciências geoespaciais trabalham com aspectos geométricos e de Banco de Dados Geográficos (BDG). Na aquisição dados, a triangulação e/ou a trilateração são importantes técnicas empregadas visando o povoamento dos BDG. Com o uso cada vez maior destas técnicas e com a facilidade de uso das redes irregulas de triângulos (TIN – *Triangular Irregular Network*) em Sistemas de Informações Geográficas, cresce cada vez mais a quantidade de usuários de informações geográficas.

O processamento de redes triangulares irregulares para a geração e extração de geometrias é influenciado pelos erros inerentes a cada vértice. Tais erros indicam inclusive a rigidez matemática e física de seus triângulos. Em triangulações geodésicas e topográficas as distâncias entre os vértices são muito grandes, o que indica que provavelmente a interferência na geração de triângulos é muito reduzida, devido à relação entre à precisão do ponto e o comprimento da aresta. No entanto, em uma TIN com arestas menores estes erros influenciam ainda mais a geração dos triângulos, que podem variar conforme se reduz a precisão no vértice.

Esta pesquisa ajuda a responder, por exemplo: até quanto uma alteração na qualidade do ajustamento, ou seja, aumentando ou diminuindo a precisão nos pontos, a triangulação continuaria sendo considerada estável. A partir destes experimentos iniciais, é possível reconhecer padrões capazes de gerar novas TIN's com triangulação similar e mesma qualidade estatística da original.

Este artigo se propõe a contribuir com resultados que quantifiquem até que precisão  $\sigma$  (sigma) pode-se considerar o que é ambíguo do ponto de vista topológico. Para isso demons-

tra-se que existe uma precisão máxima para a qual a topologia permanece constante em cada ponto individualmente e na rede triangular irregular como um todo.

Para o entendimento dos itens posteriores faz-se necessária a apresentação de alguns conteúdos, tais como topologia, redes triangulares irregulares, triangulação de Delaunay, incerteza associada à geometria ponto e simulação de Monte Carlo.

### 1.1. Topologia

Segundo Casanova, et al, 2005, a topologia é a parte da matemática na qual se investigam as propriedades das configurações que permanecem invariantes nas transformações de rotação, translação e escala. São relações espaciais que independem da geometria, mas sim dos “elementos do relacionamento topológico vetorial”, genericamente:

- Conectividade;
- Adjacência;
- Contingência.

Desses elementos do relacionamento topológico vetorial, um é importante para o presente estudo, no que se refere à TIN: conectividade. Erciyas (2013), define a conectividade ou conexidade (*connectedness*) de um grafo da seguinte forma:

“Um grafo está conectado se houver um caminho entre qualquer par de vértices  $v_1$  e  $v_2$ ”

A adjacência é a informação sobre vizinhança de objetos espaciais, no qual uma aresta determina o polígono à esquerda e à direita.

Contingência é a informação sobre a inclusão de um objeto espacial dentro de outro objeto espacial. Não existe contingência no estudo isolado de uma TIN.

### 1.2. Rede Triangular Irregular

Uma Rede Triangular Irregular (RTI), do inglês *Triangulated Irregular Network* (TIN) é um formato de dados vetorial definido por uma triangulação a partir de um conjunto de pontos amostrais irregularmente distribuídos nas coordenadas  $(x, y)$ , com respectivos valores em  $z$ , normalmente referentes à altimetria, que permitem modelar matematicamente uma superfície por meio de uma rede.

Existem diversos algoritmos para a geração de triângulos a partir de uma malha de pontos. A triangulação de Delaunay (Zeiler (1999); FELGUEIRAS e GOODCHILD (1995); Tsai (1993); FERNANDES e MENEZES (2005)) é a mais popular utilizada para esta conversão, estando presente em praticamente todos os Sistemas de Informações Geográficas. A triangulação de Delaunay permite gerar triângulos mais homogêneos e próximos de um triângulo equilátero quanto possíveis, otimizando a superfície representada.

### 1.3. Incerteza associada à geometria Ponto

Seja o ponto bidimensional  $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  no qual  $(\forall x_1 \in x)(\exists y_1 \in y)((x_1, y_1) \in \mathfrak{R}^2)$ , e seus erros em  $x$  e  $y$ . A coordenada cartesiana verdadeira de um ponto  $A$  é definida por:  $\hat{A} = \begin{bmatrix} x_1 + \tau_x \pm \sigma_{x_1} \\ y_1 + \tau_y \pm \sigma_{y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} \\ \sigma_{y_1} \end{bmatrix}$ . Genericamente a incerteza de um ponto bidimensional é dada por:  $\hat{P}_i = \begin{bmatrix} x_i + \tau_x \pm \sigma_{x_i} \\ y_i + \tau_y \pm \sigma_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \sigma_{x_i} \\ \sigma_{y_i} \end{bmatrix}$ . No qual  $\tau$  (tau) é a componente de tendência e  $\sigma$  (sigma) é a componente de precisão. Como esta pesquisa não objetiva estudo de tendência, considera-se  $\tau = 0$ .

### 1.4. Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo (Metropolis et al., 1953; Amar, 2006; Mark e Mordechai,

2011), nome originado do Cassino de Monte Carlo, no principado de Mônaco, é uma aplicação de estatística inferencial. Amar, 2006, descreve alguns dos algoritmos que foram desenvolvidos para realizar simulações de Monte Carlo.

A simulação de Monte Carlo é usada na experimentação do efeito dos erros aleatórios em cada coordenada de um ponto original da rede triangular irregular. Cada ponto da rede triangular irregular foi perturbado  $k$  vezes segundo uma distribuição Normal.

## 2. METODOLOGIA DE TRABALHO

Ao longo do estudo proposto, na definição e modelagem do problema, pode-se considerar alguns conjuntos de experimentos aleatórios com perturbação de cada ponto da rede, chamados de experimentos ou simulações locais.

A partir dos experimentos busca-se reconhecer se existe e até que precisão  $\sigma$  (sigma) a topologia gerada pela triangulação pode ser considerada constante.

A topologia é considerada constante se, com a alteração das coordenadas dos vértices, os triângulos continuarem sendo os mesmos. Seguindo esta ideia, implementou-se um algoritmo para comparar topologias de redes triangulares irregulares verificando-se se ela se mantém constante.

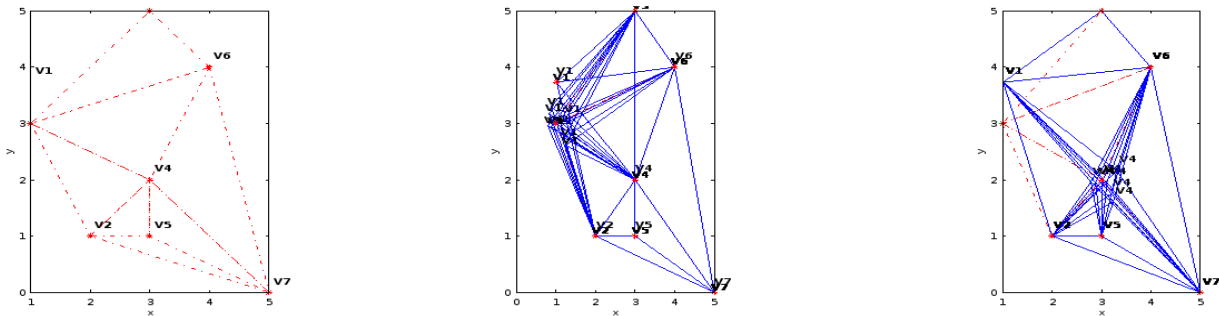


FIG. 1 Simulação de topologia

A Figura 1 apresenta dois exemplos de simulação com topologia constante. No primeiro gráfico apresenta-se a triangulação de Delaunay original, em vermelho; no segundo a perturbação no ponto 1, com as triangulações simuladas em azul; e no terceiro gráfico as perturbações no ponto 4, com as triangulações simuladas também em azul.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os experimentos foram realizados em rede simulada com 4 pontos e configuração losangular, de tal forma a permitir testar a metodologia e os comportamentos locais, para em etapas posteriores da pesquisa aplicá-la em redes reais maiores.

Para a presente pesquisa foram realizados diversos experimentos matemáticos aleatórios, por meio da técnica conhecida como método de Monte Carlo. Em cada ponto foi inserido um ruído  $k$  vezes, de tal forma a simular a perturbação do ponto original. A perturbação do ponto foi realizada gerando-se um ruído conforme a distribuição normal padronizada, que possui média zero e variância igual a 1, portanto:  $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ . Por se tratar de uma simulação, a fórmula pode ser reescrita em x e em y por:  $z_{x_i} = \frac{x_i - x(\text{ponto})}{\sigma}$  e  $z_{y_i} = \frac{y_i - y(\text{ponto})}{\sigma}$ . Nas simulações faz-se:  $\sigma \cdot z = \hat{x} - x(\text{ponto})$  e  $\sigma \cdot z = \hat{y} - y(\text{ponto})$ . Portanto,  $\hat{x}_i = (\sigma \cdot z_i) + x(\text{ponto})$ ;  $\hat{y}_i = (\sigma \cdot z_i) + y(\text{ponto})$ . No qual  $\hat{x}_i$  e  $\hat{y}_i$  são as novas coordenadas obtidas pela perturbação de cada ponto original e  $i = 1, \dots, k$ .

Para a geração dos números pseudoaleatórios normalmente distribuídos usou-se o método Marsaglia and Tsang Ziggurat, descrito em Marsaglia e Tsang, 2000.

Para efeito deste texto, os termos perturbação, ruído e oscilação dos pontos são usados como sinônimos. O termo simulação refere-se normalmente à rede triangular irregular cujos pontos estão sendo perturbados. Além disso, muitas das figuras apresentadas a seguir são repetidas para melhorar a legibilidade.

A rede simulada é composta de 4 pontos  $P_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ , formando um losango de coordenadas  $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

Esta rede, com apenas quatro pontos, foi escolhida inicialmente por ser a menor quantidade de pontos que permite triangulações diferentes durante a sua perturbação. A escolha na forma de losango foi motivada por ser uma geometria simples.

A oscilação foi realizada inicialmente para cada ponto da rede de forma isolada. Cada ponto, genericamente modelado na forma  $\hat{P}_i = \begin{bmatrix} x_i \pm \sigma_{x_i} \\ y_i \pm \sigma_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \sigma_{x_i} \\ \sigma_{y_i} \end{bmatrix}$ , foi inicialmente perturbado com  $\sigma_{x_i} = \sigma_{y_i} = 1$ . Em seguida realiza-se a simulação na rede para sigmas variados.

### 3.1. Simulação no Ponto 1

A primeira perturbação realizada foi no ponto  $P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Todas as análises relativas ao ponto  $P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$  são análogas, pois são simétricos.

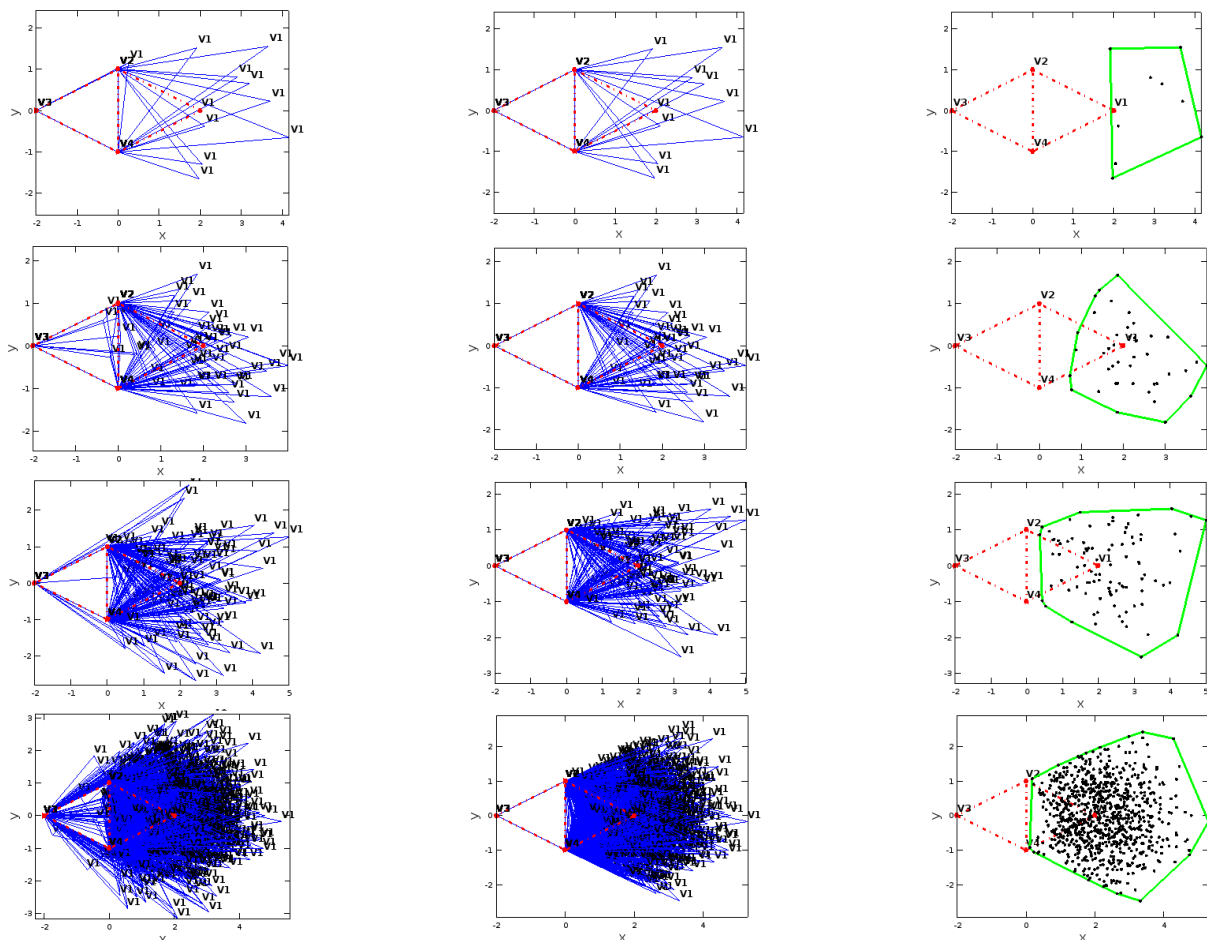


FIG. 2 Experimentos com as perturbações  $k=10, 50, 100$  e  $1000$ , com  $\sigma = 1$ .

A figura (FIG. 2) apresenta as plotagens de todas as triangulações simuladas:

- Sem comparação de topologia, ou seja, mantendo as  $k$  perturbações referentes ao ponto 1 original. Nela as triangulações simuladas são apresentadas em azul;
- As triangulações com topologia constante, ou seja,  $k_{TC} \leq k$ , no qual  $k_{TC}$  é a quantidade de perturbações com topologia constante (TC), também em azul; e
- O fecho convexo resultante dos pontos com ruído que permitiram gerar triangulações de Delaunay com a mesma topologia da rede original, apresentado na cor verde.

Os experimentos aleatórios foram realizados para  $k=10, 50, 100$  e  $1000$ , apresentados cada um em uma linha com os 3 gráficos descritos, inicialmente com  $\sigma = 1$ .

Entretanto, mostrou-se necessário identificar para outros sigmas qual o comportamento da região por onde o ponto 1 pode oscilar e, mesmo assim, permanecer com topologia constante.

A figura a seguir (FIG. 3) apresenta os pontos e os fechos convexos que delimitam a região de topologia constante com simulações distintas, alterando-se o valor de sigma para 0.1, 0.3, 0.5 e 1; cada um com  $k=10, 100, 500, 1000$ .

Na figura são apresentados em cada linha  $k = 10, 100, 500, 1000$  para  $\sigma = 0,1$ ;  $k = 10, 100, 500, 1000$  para  $\sigma = 0,3$ ; e assim por diante.

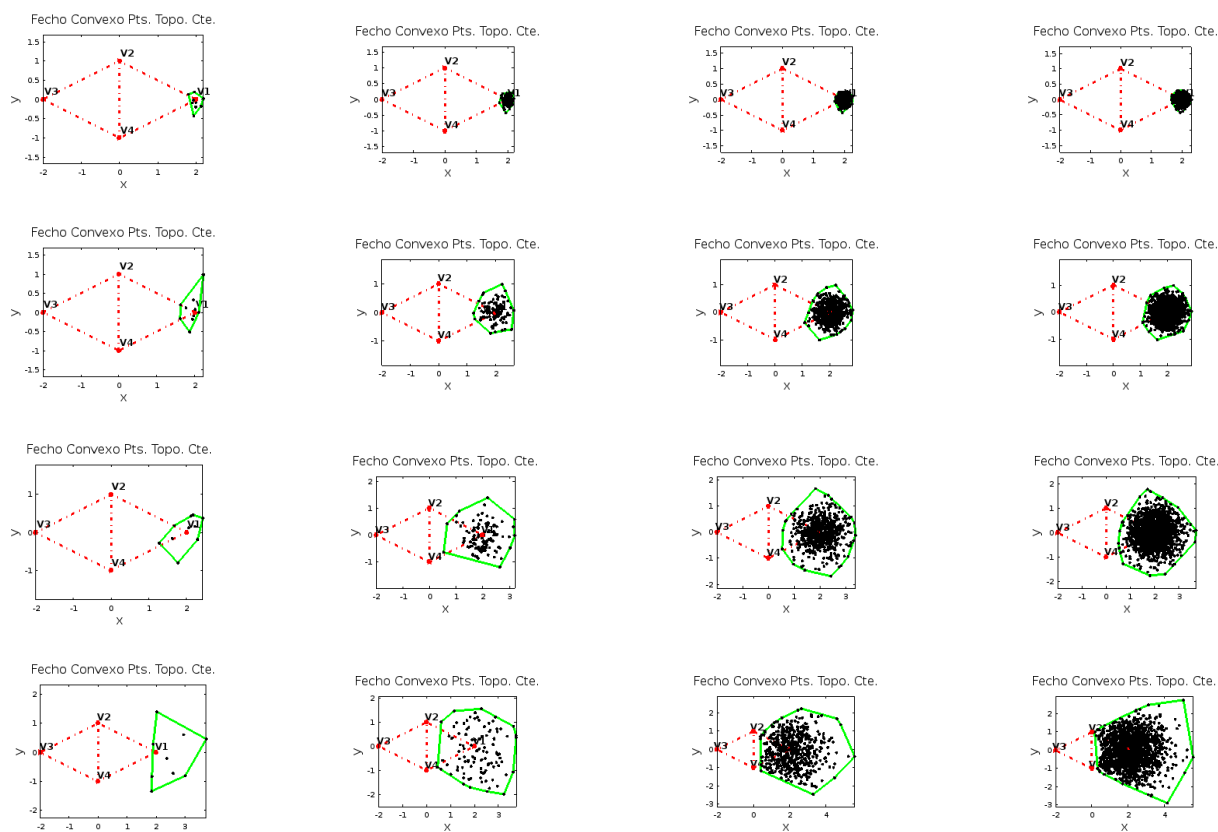


FIG. 3 Fechos convexos locais do ponto perturbado para simulações com sigma 0.1, 0.3, 0.5 e 1; cada um com  $k=10, 100, 500, 1000$ .

### 3.2. Simulação no Ponto 2

Continuando a análise da rede, na segunda simulação foram realizadas perturbações no ponto  $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Todas as análises relativas ao ponto  $P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  são análogas, pois os pontos 2 e 4 são simétricos.

Assim como ocorreu no ponto 1, foram realizados experimentos no ponto 2 com  $k=10, 50, 100$  e  $1000$ , com  $\sigma = 1$ . Em seguida (FIG. 4), os experimentos estão focados em reconhecer padrões de comportamento quando sigma é variável.

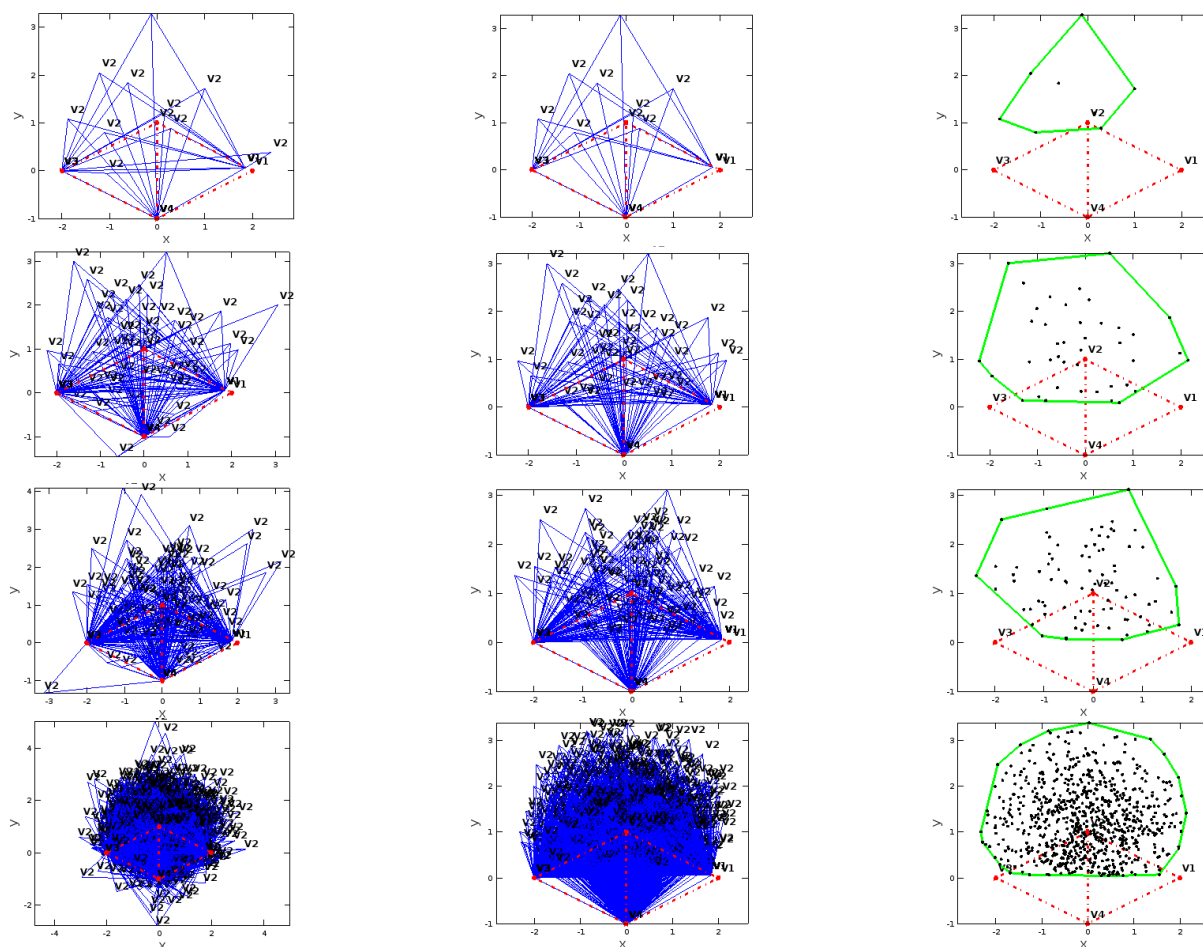


FIG. 4 Simulações para  $k=10, 50, 100$  e  $1000$ , com  $\sigma = 1$ .

Da mesma forma, com o objetivo de identificar o padrão de comportamento para diversos sigmas quando a topologia permanece inalterada, foram realizadas simulações para os valores de  $\sigma$  0.1, 0.3, 0.5 e 1; cada experimento com perturbações  $k=10, 100, 500, 1000$ .

A figura a seguir (FIG. 5) apresenta esses resultados, de tal forma que a cada linha de gráficos estejam apresentados todos os experimentos de um determinado  $\sigma$ , com  $k$  na ordem crescente.

### 3.3. Análise dos Resultados

A simulação é usada para resolver o problema de identificação da existência de  $\sigma$  máximo para o qual a probabilidade de ocorrer topologia constante na rede triangular irregular é de 100%. Os resultados matemáticos deram origem aos seguintes teoremas.

**Teorema 1:** *Se um ponto qualquer de coordenadas  $(x_i, y_i)$  em uma rede triangular irregular é perturbado, segundo uma distribuição Normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , então existe um valor  $\sigma_{max}$  (sigma máximo) para o qual a topologia da rede permanecerá constante.*

**Demonstração:** Para encontrar o  $\sigma$  máximo  $\sigma_{max}$  para o qual a topologia permanece constante, realizou-se milhares de perturbações no ponto 1 da seguinte forma:  $\sigma$  variando de 0.1 a 5 com intervalos de 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; ...; 0.000001; conforme tabela 1 a seguir.

Intervalos de variação de $\sigma$	Resultados de $\sigma_{max.1}$ para $P(TC = 1) = 1$	Resultados de $\sigma_{min.1}$ para $P(TC = 1) < 1$
0.1:0.01:0.5	sigma = 0.38000	sigma = 0.39000
0.1:0.001:0.5	sigma = 0.35100	sigma = 0.35200
0.1:0.0001:0.5	sigma = 0.30920	sigma = 0.30930
0.1:0.00001:0.5	sigma = 0.30866	sigma = 0.30867
0.1:0.000001:0.5	sigma = 0.30909	sigma = 0.30909

TAB. 1 Resultados das simulações com  $\sigma$  variando de 0.1 a 5 com intervalos de 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; ...; 0.000001

Com isso, verifica-se que  $\sigma_{max.1}$  do ponto 1 existe e é obtido por  $\sigma_{max.1} = \min(\sigma_{max}) = 0.30866$ .

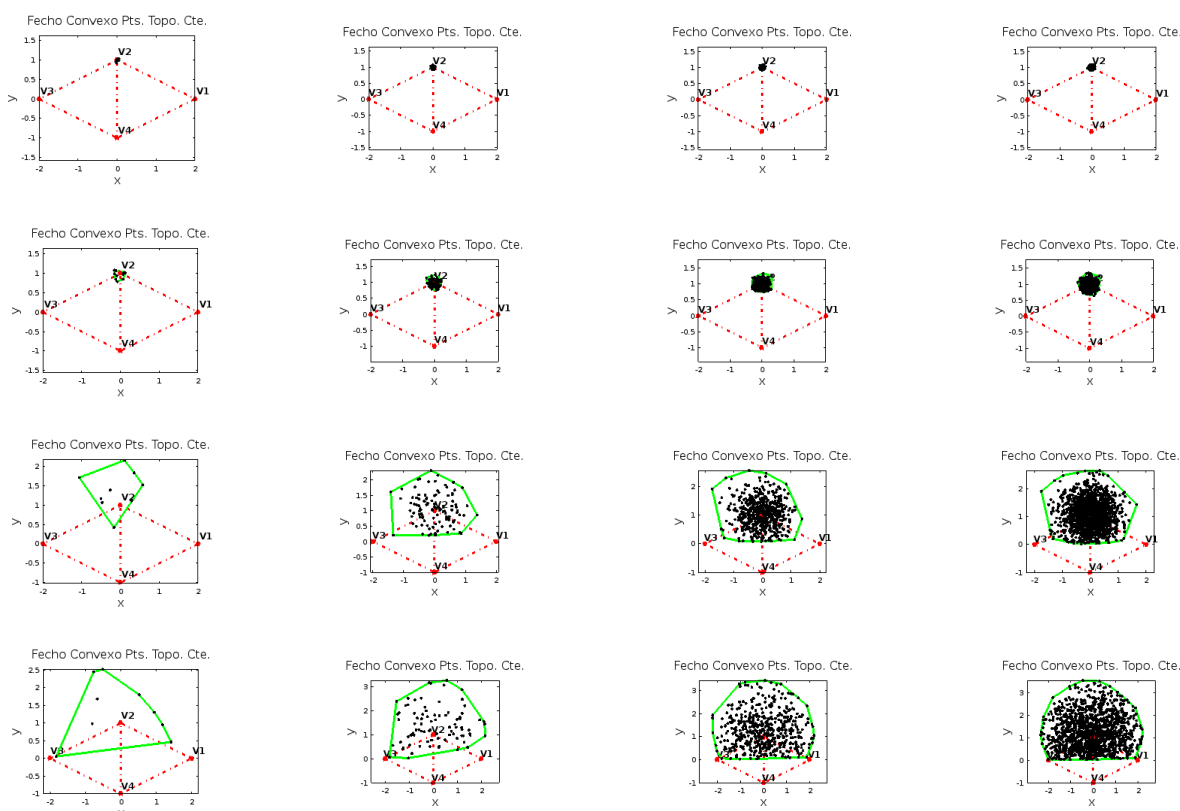


FIG. 5 Experimentos para o fecho convexo dos pontos  $s$  com simulações para sigma 0.1, 0.3, 0.5 e 1; cada um com  $k=10, 100, 500, 1000$ .

Para o ponto 2, com o objetivo de encontrar  $\sigma_{max.2}$  realizou-se as simulações conforme a tabela 2 a seguir.

Intervalos de variação de $\sigma$	Resultados de $\sigma_{max.2}$ para $P(TC = 1) = 1$	Resultados de $\sigma_{min.2}$ para $P(TC = 1) < 1$
0.1:0.1:0.5	sigma = 0.20000	sigma = 0.30000
0.1:0.01:0.5	sigma = 0.26000	sigma = 0.27000
0.1:0.001:0.5	sigma = 0.25700	sigma = 0.25800
0.1:0.0001:0.5	sigma = 0.25190	sigma = 0.25200
0.2:0.00001:0.5	sigma = 0.20240	sigma = 0.20241

TAB. 2 Resultados das simulações com  $\sigma$  variando de 0.1 a 5 com intervalos de 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; ...; 0.000001

Com isso, identificou-se  $\sigma_{max.2} = 0.2$ .

#### 4. CONCLUSÃO

Analisando-se os pontos 1 e 2 conjuntamente, nota-se o seguinte.

**Teorema 2:** *Toda rede triangular irregular de duas dimensões possui um valor  $\sigma_*$  (sigma asterisco) para o qual a topologia da rede permanecerá constante, obtido por:*

$$\sigma_* = \min(\max \sigma_i) = \min(\sigma_{max.1}, \sigma_{max.2}, \dots, \sigma_{max.n})$$

**Demonstração:** Generalizando, fazendo o pior caso da rede triangular irregular como:  $\sigma_* = \min(\sigma_{max.1}, \sigma_{max.2}) = \min(0.30866, 0.2) = 0.2$ .

Note-se que apesar do método de Monte Carlo ser ineficiente do ponto de vista computacional, sendo dependente de um grande número de perturbações para a obtenção dos resultados probabilísticos, é bastante adequado para este tipo de pesquisa.

Conclui-se que sigma máximo para cada ponto existe, assim como para a rede como um todo.

#### Referências bibliográficas

- AMAR, J. G.: The Monte Carlo method in science and engineering, *Comput. Sci. Eng.*, 8 (2), 9–19, doi:10.1109/MCSE.2006.34, 2006.
- CASANOVA, M., CÂMARA, G., DAVIS, C., VINHAS, L. e QUEIROZ, G. R. de: Bancos de Dados Geográficos, MundoGEO, Curitiba., 2005.
- ERCIYES, K.: *Distributed Graph Algorithms for Computer Networks*, Springer-Verlag London, London, 2013.
- FELGUEIRAS, C.; GOODCHILD, M. F.: Two papers on triangulated surface modeling: Technical Report 95-2, National Center for Geographic Information and Analysis - NCGIA, University of California, Santa Barbara, CA, USA. [online] Available from: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.25.6645> (Accessed 26 November 2013), 1995.
- FERNANDES, M. do C.; MENEZES, P. M. L. de: Comparação Entre Métodos Para Geração de MDE Para a Obtenção de Observações em Superfície Real no Maciço da Tijuca - RJ, *Rev. Bras. Cartogr.*, 57(02), 154–161, 2005.
- GOODCHILD, M. F. Attribute accuracy. In: Guptill, S.C. and Morrison, J.L. (eds.), *Elements of Spatial Data Quality*. Amsterdam: Elsevier, pp. 59–79, 1995.
- MARK, S. and MORDECHAI, S.: Applications of Monte Carlo Method in Science and Engineering, InTech, Rijeka, Croatia. [online] Available from: [www.intechopen.com](http://www.intechopen.com), 2011.
- MARSAGLIA, G. and TSANG, W. W.: The Ziggurat Method for Generating Random Variables, *J. Stat. Softw.*, 5(8), 1–7 [online] Available from: <http://www.jstatsoft.org/v05/i08/>, 2000.
- METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N. and TELLER, A. H.: Equation of State Calculations by Fast Computing Machines, *J. Chem. Phys.*, 21(6), 1087–1092, 1953.
- TSAI V. J. D. 1993, Delaunay triangulations in TIN creations: an overview and a linear-time algorithm. *International Journal of Geographical Information Systems*, 7, 501-524.
- ZEILER, M.: *Modeling Our World: The ESRI Guide to Geodatabase Design*, Environmental Systems Research Institute, Inc., Redlands, California, EUA, 1999.